

Calcul différentiel

Problème de primitivation

Exercice 1 [01772] [Correction]

Déterminer les fonctions f de classe C^1 solutions des systèmes suivants :

$$\text{a) } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = xy^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2y \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Différentielle

Exercice 2 [02976] [Correction]

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f(0) = 0$.

On suppose que $df(x)$ est orthogonale pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Montrer que f est orthogonale.

Exercice 3 [03050] [Correction]

Soit $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $d\varphi(0)$ soit inversible.

Montrer qu'il existe un voisinage V de 0 tel que la restriction de φ à V soit injective.

Exercice 4 [03415] [Correction]

Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f, g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U, f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On suppose de f et h sont différentiables en $a \in U$ et $f(a) = h(a)$. Montrer que g est différentiable en a .

Jacobien

Exercice 5 [00052] [Correction]

a) Calculer le jacobien de l'application $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$

b) Même question avec $(r, \theta, \varphi) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$.

Difféomorphisme

Exercice 6 [00053] [Correction]

Montrer que $(u, v) \mapsto (u + v, uv)$ définit un C^1 -difféomorphisme de

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / u < v\}$$

vers un ouvert V que l'on précisera.

Exercice 7 [00054] [Correction]

Montrer que

$$\varphi : (x, y) \mapsto \left(x + \frac{1}{2} \cos y, y + \frac{1}{2} \cos x\right)$$

est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 sur lui-même.

Exercice 8 [02908] [Correction]

Soient $k \in]0, 1[$ et $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq k$$

On définit une application $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$\varphi(x, y) = (y + f(x), x + f(y))$$

Montrer que φ est un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^2 dans lui-même.

Exercice 9 [01328] [Correction]

On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique et on considère $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , croissante vérifiant $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

On pose

$$F(x) = f(\|x\|)x$$

a) Montrer que $N : x \mapsto \|x\|$ est C^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et exprimer sa différentielle.

b) Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R}^n et déterminer sa différentielle.

c) Montrer que

$$\forall (x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, (dF(x)(h) \mid h) \geq f(\|x\|) \|h\|^2$$

d) Montrer que F est un difféomorphisme de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n .

Divers

Exercice 10 [03510] [Correction]

Soit S le sommet de coordonnées $(a, 0)$ de l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Déterminer deux points M, N de l'ellipse tels que l'aire du triangle (SMN) soit maximale.

Recherche d'extremum

Exercice 11 [02473] [Correction]

Avec Maple, trouver les extrema de

$$f(x, y) = y \exp(x) + x \exp(y)$$

Exercice 12 [03740] [Correction]

\mathbb{R}^n est muni de la structure euclidienne canonique.

a) Comment détermine-t-on les extrémums d'une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^n (n fixé dans \mathbb{N}^*) ?

b) Etudier l'existence d'extrémums de la fonction f à valeurs dans \mathbb{R} , définie sur \mathbb{R}^3 par

$$(x, y, z) \mapsto (2x + y - z)(x + y + 2z)$$

c) Déterminer les extrémums de la fonction f dans la boule unité fermée de \mathbb{R}^3 .

d) E étant un espace vectoriel euclidien, f et g étant deux formes linéaires non nulles sur E , déterminer les extrémums globaux de la fonction fg dans la boule unité fermée de E en utilisant des vecteurs représentants f et g à travers le produit scalaire.

Enoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 13 [02548] [Correction]

Extremum locaux et globaux de $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$.

Exercice 14 [02496] [Correction]

Extremum locaux et globaux de

$$f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

Exercice 15 [00060] [Correction]

Extrema locaux et globaux de

$$f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$$

Formes différentielles

Exercice 16 [00258] [Correction]

a) Montrer que la forme différentielle $\omega = (x + y) dx + (x - y) dy$ est exacte et déterminer une primitive de ω .

b) Résoudre alors l'équation différentielle

$$x + y + (x - y)y' = 0$$

dont l'inconnue est la fonction y de la variable réelle x .

Exercice 17 [03367] [Correction]

a) Montrer que la forme différentielle

$$\omega(x, y) = (xy - y^2 + 1) dx + (x^2 - xy - 1) dy$$

n'est pas fermée.

b) Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que la forme différentielle

$$\omega(x, y) f(xy)$$

soit exacte et déterminer ses primitives.

Exercice 18 [02566] [Correction]

La forme différentielle $\omega(x, y) = x^2 dy + y^2 dx$ est-elle fermée ? Exacte ?

Donner l'ensemble des cercles (parcourus une fois dans le sens direct) le long desquels ω est nulle ?

Exercice 19 [01350] [Correction]

Les formes différentielles ω suivantes sont-elles exactes ? Si oui, déterminer les primitives de ω :

$$\text{a) } \omega = x dy + y dx \quad \text{b) } \omega = \frac{x dy - y dx}{(x - y)^2} \quad \text{c) } \omega = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} - y dy$$

Intégrales curvilignes

Exercice 20 [00106] [Correction]

On considère la forme différentielle

$$\omega(x, y) = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

- La forme différentielle ω est-elle fermée ?
- Calculer l'intégrale de ω le long du cercle de centre O , de rayon 1 parcouru dans le sens direct.
- La forme différentielle ω est-elle exacte ?

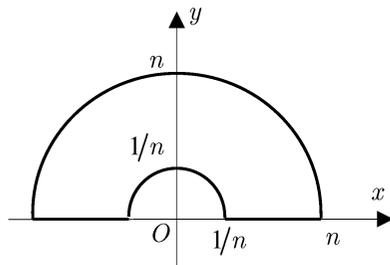
Exercice 21 [00107] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Montrer que la forme différentielle suivante est fermée

$$\omega(x, y) = \frac{e^{-y}}{x^2 + y^2} ((x \sin x - y \cos x) \, dx + (x \cos x + y \sin x) \, dy)$$

- Calculer la circulation de ω le long de l'arc figuré direct ci-dessous



- En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ déterminer la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

Exercice 22 [00109] [Correction]

Soient O, A, B les points d'affixes respectives $0, r, r \exp(i\pi/4)$ avec $r > 0$. Soit Γ_r l'arc paramétré de \mathbb{C} constitué :

- du segment $[O, A]$, orienté de O vers A ;
 - de l'arc \mathcal{C}_r du cercle de centre O et de rayon r d'origine A et d'extrémité B ;
 - du segment $[B, O]$ orienté de B vers O .
- Calculer l'intégrale curviligne

$$I_r = \oint_{\Gamma_r} e^{-(x+iy)^2} (dx + i \, dy)$$

- Que dire de la limite, quand $r \rightarrow +\infty$, de

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} e^{-(x+iy)^2} (dx + i \, dy) ?$$

- Qu'en déduire ?

Exercice 23 [01351] [Correction]

Calculer

$$I = \oint_{\Gamma} x \, dy + y \, dx$$

où Γ est l'arc de parabole $y = x^2$ allant de O à $A(2, 4)$.

Exercice 24 [00103] [Correction]

Calculer

$$I = \oint_{\Gamma} x^2 \, dy + y^2 \, dx$$

où Γ est un paramétrage direct du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $R > 0$.

Exercice 25 [00104] [Correction]

Calculer

$$I = \oint_{\Gamma} x^2 \, dy + y^2 \, dx$$

où Γ est un paramétrage direct du triangle (OIJ) avec $I(1, 0)$ et $J(0, 1)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

a) $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C^{te}$ sur \mathbb{R}^2 .

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + C^{te}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

c) Il n'y a pas de solution car $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ donne

$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + C(y)$ qui injectée dans la deuxième équation donne :

$\frac{y}{x^2+y^2} + C'(y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ qui est incompatible avec C fonction de la seule variable y .

Exercice 2 : [énoncé]

Soient $a, b \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\varphi(t) = f(a + t(b - a))$$

La fonction φ est de classe \mathcal{C}^1 et sa dérivée est donnée par

$$\varphi'(t) = df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$$

Puisque $f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0)$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(a + t(b - a)) \cdot (b - a) dt$$

et donc

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \int_0^1 \|df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)\| dt \leq \|b - a\|$$

Pour poursuivre supposons que l'on sache la fonction f bijective.

Puisque f est de classe \mathcal{C}^1 et puisque son jacobien ne s'annule pas (car le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1), on peut, par le théorème d'inversion globale, affirmer que f est un \mathcal{C}^1 difféomorphisme de \mathbb{R}^n vers \mathbb{R}^n et que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, d(f^{-1})(y) = [df(x)]^{-1} \text{ avec } x = f^{-1}(y)$$

Puisqu'en tout point, la différentielle de f est orthogonale, il en est de même de la différentielle de f^{-1} .

L'étude précédente appliquée à f^{-1} donne alors

$$\forall c, d \in \mathbb{R}^n, \|f^{-1}(d) - f^{-1}(c)\| \leq \|d - c\|$$

Cette propriété et la précédente donne

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, \|f(b) - f(a)\| = \|b - a\|$$

Sachant $f(0) = 0$, on obtient

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, \|f(a)\| = \|a\|$$

et alors la relation

$$\|f(b) - f(a)\|^2 = \|f(b)\|^2 - 2(f(a) | f(b)) + \|f(a)\|^2$$

permet d'établir

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^n, (f(a) | f(b)) = (a | b)$$

Soient $a, b, h \in \mathbb{R}^n$. Pour $t \neq 0$,

$$\left(\frac{1}{t} (f(a + t.h) - f(a)) | f(b) \right) = (h | b)$$

et donc à la limite quand $t \rightarrow 0$

$$(df(a).h | f(b)) = (h | b)$$

Par la surjectivité de f , on en déduit

$$\forall a, a', c, h \in \mathbb{R}^n, (df(a).h | c) = (df(a').h | c)$$

et donc

$$\forall a, a' \in \mathbb{R}^n, df(a) = df(a')$$

La différentielle de f est donc constante. Notons ℓ l'endomorphisme orthogonal égal à cette constante.

En reprenant des calculs semblables à ceux initiaux

$$\forall a \in \mathbb{R}^n, f(a) = f(0) + \int_0^1 df(0 + t.a).a dt = \int_0^1 \ell(a) dt = \ell(a)$$

Il ne reste plus qu'à démontrer le résultat sans supposer la fonction f bijective... ce que je ne sais pas simplement argumenter!

On peut cependant exploiter le théorème d'inversion locale et les idées suivantes : L'application f réalise un \mathcal{C}^1 difféomorphisme d'un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant 0 vers un ouvert V contenant aussi 0.

Ce qui est embêtant pour poursuivre, c'est qu'on ne sait pas si cet ouvert V est convexe... Cependant, il existe une boule ouverte $B(0, R)$ incluse dans V et quitte à restreindre l'ouvert U , on peut désormais supposer que f réalise un \mathcal{C}^1 difféomorphisme d'un ouvert U contenant 0 vers l'ouvert $B(0, R)$. On a alors comme dans l'étude qui précède

$$\forall a, b \in U, \|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\|$$

et

$$\forall c, d \in B(0, R), \|f^{-1}(d) - f^{-1}(c)\| \leq \|d - c\|$$

ce qui assure

$$\forall a, b \in U, \|f(b) - f(a)\| = \|b - a\|$$

On en déduit

$$\forall a, b \in U, (f(a) | f(b)) = (a | b)$$

Sachant que les $f(b)$ parcourent un ouvert de \mathbb{R}^n centré en 0, on peut comme au dessus conclure que la différentielle de f est constante sur l'ouvert U .

Pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on reprend l'étude avec l'application $g : x \mapsto f(x_0 + x) - f(x_0)$ et on obtient que la différentielle de f est localement constante puis constante car continue. On peut alors enfin conclure.

Exercice 3 : [énoncé]

Cas $d\varphi(0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$:

Considérons l'application $\psi : x \mapsto \varphi(x) - x$.

ψ est de classe \mathcal{C}^1 et $d\psi(0) = \tilde{0}$, il existe donc une boule B centrée en 0 telle que

$$\forall x \in B, \|d\psi(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a alors

$$\forall x, y \in B, \|\psi(y) - \psi(x)\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\|$$

Pour $x, y \in B$, si $\varphi(x) = \varphi(y)$ alors $\psi(y) - \psi(x) = y - x$ et la relation précédente donne

$$\|y - x\| \leq \frac{1}{2} \|y - x\|$$

d'où l'on tire $y = x$.

Cas général :

Considérons l'application $\theta = (d\varphi)^{-1}(0) \circ \varphi$ qui est de classe \mathcal{C}^1 par composition.

Pour celle-ci

$$d\theta(0) = (d\varphi^{-1})(0) \circ d\varphi(0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^n}$$

Par l'étude précédente, il existe V voisinage de 0 tel que la restriction de θ au départ de V soit injective et alors, par un argument de composition, la restriction de φ au départ de ce même voisinage V est aussi injective.

Exercice 4 : [énoncé]

La fonction $h - f$ est positive et nulle en a qui est donc minimum de cette fonction. La fonction $h - f$ est en outre différentiable en a et donc la différentielle de $h - f$ en a est nulle (point critique). On en déduit que les différentielles de f et h en a sont égales. Notons ℓ cette différentielle commune.

Quand $u \rightarrow 0$, on a

$$f(a + u) = f(a) + \ell(u) + o_1(u) \text{ et } h(a + u) = h(a) + \ell(u) + o_2(u)$$

donc

$$g(a) + \ell(u) + o_1(u) \leq g(a + u) \leq g(a) + \ell(u) + o_2(u)$$

et on en déduit

$$g(a + u) = g(a) + \ell(u) + o(u)$$

Ainsi g est différentiable en a et sa différentielle en a est l'application linéaire ℓ .

Exercice 5 : [énoncé]

Les deux applications sont de classe \mathcal{C}^1

a) On obtient r .

b) On obtient $r^2 \sin \theta$.

Exercice 6 : [énoncé]

L'application $\varphi : (u, v) \mapsto (u + v, uv)$ est de classe \mathcal{C}^1 de U vers \mathbb{R}^2 .

Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$

Si $(s, p) = \varphi(u, v)$ alors u et v sont les deux racines de $x^2 - sx + p = 0$ et donc $\Delta = s^2 - 4p > 0$.

Les valeurs prises par φ appartiennent à

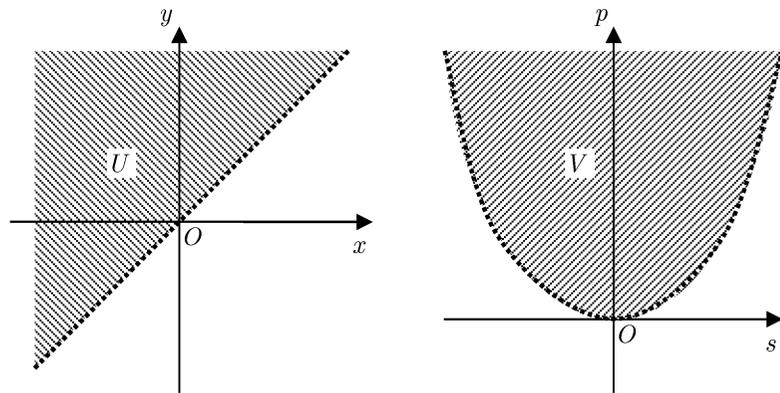
$$V = \{(s, p) \in \mathbb{R}^2 / s^2 - 4p > 0\}$$

De plus, pour $(s, p) \in V$, il existe un unique couple (u, v) tel que $u < v$ et $\varphi(u, v) = (s, p)$, c'est le couple formé des deux racines de l'équation $x^2 - sx + p = 0$

$$u = \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2} \text{ et } v = \frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$$

Ainsi φ réalise une bijection de U sur V .

On vérifie aisément que U et V sont des ouverts (par image réciproque d'ouverts par des applications continues pertinemment construites) et que φ ainsi que φ^{-1} sont de classe \mathcal{C}^1 .



les ouverts U et V

Exercice 7 : [énoncé]

L'application φ est de classe \mathcal{C}^1 .

Le jacobien de φ en (x, y) est $1 - \frac{1}{4} \sin x \sin y$: il ne s'annule pas.

Pour conclure, il ne reste plus qu'à observer que φ est bijective.

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} u = x + \frac{1}{2} \cos(y) \\ v = y + \frac{1}{2} \cos(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} \cos\left(v - \frac{1}{2} \cos(x)\right) = u \\ y = v - \frac{1}{2} \cos(x) \end{cases}$$

Considérons

$$f_v : x \mapsto x + \frac{1}{2} \cos\left(v - \frac{1}{2} \cos(x)\right)$$

Une étude fonctionnelle montre que f_v réalise une bijection strictement croissante de \mathbb{R} vers \mathbb{R} .

Ainsi

$$\varphi(x, y) = (u, v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = f_v^{-1}(u) \\ y = v - \frac{1}{2} \cos(f_v^{-1}(u)) \end{cases}$$

ce qui donne la bijectivité de φ .

Exercice 8 : [énoncé]

L'application φ est clairement de classe \mathcal{C}^1 .

Étudions sa bijectivité. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y + f(x) = a \\ x + f(y) = b \end{cases}$$

ce qui nous ramène au système

$$\begin{cases} y + f(b - f(y)) = a \\ x = b - f(y) \end{cases}$$

Considérons l'application

$$\varphi_b : y \mapsto y + f(b - f(y))$$

φ_b est continue dérivable et

$$\varphi'_b(y) = 1 - f'(y)f'(b - f(y))$$

donc $\varphi'_b(y) > 0$ car

$$|f'(y)f'(b - f(y))| \leq k^2 < 1$$

Par conséquent, l'application φ_b est strictement croissante.

De plus, f étant k lipschitzienne

$$|f(t) - f(0)| \leq k|t|$$

donc

$$|f(t)| \leq k|t| + |f(0)|$$

puis

$$|f(b - f(y))| \leq k|b - f(y)| + |f(0)| \leq k^2|y| + \ell$$

par suite

$$\varphi_b(y) \geq (1 - k^2)y - \ell \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} +\infty$$

et

$$\varphi_b(y) \leq (1 - k^2)y + \ell \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$$

L'application φ_b réalise donc une bijection de \mathbb{R} vers \mathbb{R} et alors

$$\varphi(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \varphi_b^{-1}(a) \\ x = b - \varphi_b^{-1}(a) \end{cases}$$

Finalement, l'application φ est bijective de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 .
Rappelons que l'application φ est classe \mathcal{C}^1 . De plus

$$\text{Jac}\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} f'(x) & 1 \\ 1 & f'(y) \end{pmatrix}$$

et donc le jacobine de φ ne s'annule pas en vertu du calcul suivant

$$\det(\text{Jac}\varphi_{(x,y)}) = f'(x)f'(y) - 1 \neq 0$$

et car $|f'(x)f'(y)| \leq k^2 < 1$.

Par le théorème d'inversion globale, on peut alors affirmer que φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Exercice 9 : [énoncé]

a) Par opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , N est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ puisque

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \text{ avec } x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$$

Sachant

$$\frac{\partial N}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{N(x)}$$

la différentielle de N en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$dN(x) : h \mapsto \frac{1}{\|x\|} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N}{\partial x_i}(x) h_i = \frac{(x | h)}{\|x\|}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Quand $h \rightarrow 0$

$$F(x+h) = f(\|x+h\|)(x+h)$$

Or

$$f(\|x+h\|) = f\left(\|x\| + \frac{(x | h)}{\|x\|} + o(\|h\|)\right) = f(\|x\|) + f'(\|x\|) \frac{(x | h)}{\|x\|} + o(\|h\|)$$

puis

$$F(x+h) = F(x) + f'(\|x\|) \frac{(x | h)}{\|x\|} x + f(\|x\|) h + o(\|h\|)$$

On en déduit que F est différentielle en $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et

$$dF(x) : h \mapsto f'(\|x\|) \frac{(x | h)}{\|x\|} x + f(\|x\|) h$$

Pour $x = 0$

$$F(h) = f(\|h\|)h = (f(0) + \|h\| f'(0) + o(\|h\|))h = h + o(\|h\|)$$

donc F est différentiable en 0 et

$$dF(0) : h \mapsto h$$

On peut alors calculer les dérivées partielles de F dans la base canonique (e_1, \dots, e_n) :

$$D_i F(x) = \begin{cases} f'(\|x\|) \frac{x_i}{\|x\|} + f(\|x\|) e_i & \text{si } x \neq 0 \\ e_i & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Par la continuité de f' en 0 avec $f'(0) = 0$, on observe la continuité des dérivées partielles $D_i F$ sur \mathbb{R}^n et on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 .

c) Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$(dF(x)(h) | h) = f'(\|x\|) \frac{(x | h)^2}{\|x\|} + f(\|x\|) \|h\|^2 \geq f(\|x\|) \|h\|^2$$

car $f' \geq 0$ puisque f est supposée croissante.

Pour $x = 0$, l'inégalité est vraie puisqu'il y a même égalité.

d) En tout point $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(dF(x)(h) | h) \geq f(0) \|h\|^2 \geq \|h\|^2$$

On en déduit

$$dF(x)(h) = 0 \Rightarrow h = 0$$

Ainsi $dF(x)$ est inversible et donc le jacobien de F ne s'annule pas.

Montrons que F est injective.

Si $F(x) = F(x')$ alors $f(\|x\|)x = f(\|x'\|)x'$ et donc les vecteurs x et x' sont positivement liés. En passant en norme, on a $f(\|x\|) \|x\| = f(\|x'\|) \|x'\|$. Or l'application $t \mapsto tf(t)$ est strictement croissante car

$$(tf(t))' = f(t) + tf'(t) \geq f(0) \geq 1$$

On en déduit $\|x\| = \|x'\|$ puis $x = x'$.

Montrons que F est surjective.

Soit $y \in \mathbb{R}^n$. Considérons l'application $\varphi : [0, 1] \rightarrow \|F(t.y)\|$.

φ est continue, $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(1) = f(\|y\|) \|y\| \geq \|y\|$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t) = \|y\|$ et alors $F(t.y) = y$ car $F(t.y) = \alpha y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $\|F(t.y)\| = \|y\|$.

Ainsi l'application F est surjective.

Finalement F est une bijection de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n sur lui-même dont le jacobien ne s'annule pas, c'est donc un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}^n vers lui-même.

Exercice 10 : [énoncé]

En considérons un triangle direct, on peut écrire

$$M(a \cos u, b \sin u) \text{ et } N(a \cos v, b \sin v)$$

avec $0 \leq u \leq v \leq 2\pi$ et l'aire du triangle (SMN) est alors

$$\frac{1}{2} \text{Det} \left(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SN} \right) = \frac{ab}{2} (\sin v - \sin u + \sin(u - v))$$

Le problème revient alors à maximiser la fonction

$$f : (u, v) \mapsto \sin v - \sin u + \sin(u - v)$$

sur le compact $D = \{(u, v) / 0 \leq u \leq v \leq 2\pi\}$.

Puisque la fonction f est continue ce maximum existe et puisqu'il n'est évidemment pas sur le bord de D (qui correspond aux triangles plats) c'est un point critique de la fonction f .

On résout alors le système

$$\begin{cases} -\cos u + \cos(u - v) = 0 \\ \cos v - \cos(u - v) = 0 \end{cases}$$

qui entraîne $\cos u = \cos v$ donc $v = 2\pi - u$ puis $\cos u = \cos(2\pi - 2u)$ donne $u = 2\pi/3$ et $v = 4\pi/3$.

Ceci détermine les points M et N cherchés.

Exercice 11 : [énoncé]

On définit la fonction

$$f := (x, y) \rightarrow x \exp(y) + y \exp(x);$$

On recherche les points critiques :

$$\text{solve}(D[1](f)(x, y)=0, D[2](f)(x, y)=0, x, y);$$

La réponse fournie par Maple, s'exprime à l'aide de **RootOf**. On concrétise celle-ci par

$$\text{allvalues}(\%);$$

On obtient un seul point critique $(-1, -1)$.

On peut confirmer le résultat précédent en introduisant

$$g := t \rightarrow t \exp(1/t) + \exp(t);$$

Cette fonction est strictement positive sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée obtenue par

$$\text{diff}(g(t), t);$$

assure que g est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$.

Cela permet d'affirmer que le **RootOf** précédent ne conduit qu'à la valeur -1 .

On étudie le point critique en posant

$$r := D[1](f)(-1, -1);$$

$$s := D[2](f)(-1, -1);$$

$$t := D[2, 2](f)(-1, -1);$$

et en calculant

$$r * t - s^2;$$

La valeur obtenue est strictement négative, il n'y a pas d'extremum en $(-1, -1)$.

On peut confirmer ce résultat en par la représentation

$$\text{plot3d}(f(x, y), x=-2..0, y=-2..0);$$

Exercice 12 : [énoncé]

a) On commence par rechercher les points critiques car l'on sait que les extrema locaux sont des points critiques. Dans le cas $n = 2$, on peut introduire les notations de Monge et étudier le signe de $rt - s^2$. Dans le cas général, il n'y a rien à connaître qui soit au programme mais ici il semble que l'examinateur s'attende à ce que l'on parle de matrice hessienne... sinon à quoi servirait l'hypothèse \mathcal{C}^2 ? Qu'importe, ce n'est pas au programme !

b) L'annulation des dérivées partielles conduit à Vect $(3, -5, 1)$ droite de points critiques.

Pour $x \in \mathbb{R}$, étudions le point critique $(3x, -5x, x)$. Pour $t \neq 0$, on a

$$f((3x, -5x + x) + (t, 0, 0)) = 2t^2 > 0 \text{ et } f((3x, -5x, -x) + (0, 0, t)) = -2t^2 < 0$$

et donc $(3x, -5x, x)$ n'est pas extremum local.

c) La fonction f est une forme quadratique, en introduisant la matrice représentative

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & -2 \end{pmatrix}$$

on peut écrire

$$f(x, y, z) = {}^t X M X \text{ avec } X = {}^t (x \ y \ z)$$

La matrice M est symétrique réelle. Pour calculer son polynôme caractéristique, je n'ai pas trouvé plus simple que d'appliquer Sarrus... On obtient les valeurs propres $-5/2, 0$ et $7/2$.

En exploitant une base orthonormée de diagonalisation, on obtient

$$-\frac{5}{2} {}^t X X \leq f(x) = {}^t X M X \leq \frac{7}{2} {}^t X X$$

Les valeurs extrêmes de la fonction f dans la boule unité fermée sont donc $-5/2$ et $7/2$ et celles-ci sont prises sur les vecteurs propres unitaires associés.

d) On peut introduire $a, b \in E$ tels que

$$f(x) = (a | x) \text{ et } g(x) = (b | x)$$

En introduisant une base orthonormée et en introduisant des colonnes de coordonnées aux notations entendues

$$f(x) = {}^tAX = {}^tXA \text{ et } g(x) = {}^tBX$$

La forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique $q = fg$ est donnée par

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} (f(x)g(y) + f(y)g(x))$$

ce qui donne matriciellement

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} ({}^tXA{}^tBY + {}^tXB{}^tAY)$$

La matrice symétrique représentant la forme quadratique est alors

$$M = \frac{1}{2} (A{}^tB + B{}^tA)$$

Nous allons en déterminer les valeurs propres. . .

Les matrices $A{}^tB$ et $B{}^tA$ sont de rangs au plus 1, la matrice M est donc de rang au plus 2. Le scalaire 0 en est alors valeur propre de multiplicité au moins $n - 2$ ce qui ne laisse plus la place qu'à deux autres valeurs propres λ et μ .

Puisque $\text{tr}(M) = \lambda + \mu$, on obtient l'équation

$$\lambda + \mu = (a | b)$$

Puisque $\text{tr}(M^2) = \lambda^2 + \mu^2$, on obtient, après calcul

$$\lambda^2 + \mu^2 = \frac{1}{2} [(a | b)^2 + \|a\|^2 \|b\|^2]$$

En exploitant $(\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$, on obtient

$$\lambda\mu = \frac{1}{4} [(a | b)^2 - \|a\|^2 \|b\|^2]$$

et la résolution du système somme-produit qu'on en déduit donne

$$\lambda, \mu = \frac{(a | b) \pm \|a\| \|b\|}{2}$$

A l'instar de la question c), ce sont là les deux valeurs extrémales de la forme quadratique $q = fg$.

Exercice 13 : [énoncé]

Points critiques $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

En $(0, 1)$:

$$f(0, 1) = 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

C'est un minimum global.

En $(0, e^{-2})$:

$$rt - s^2 = -4 < 0$$

Ce n'est pas un extremum local.

Exercice 14 : [énoncé]

Points critiques $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

En $(0, 1)$: $f(0, 1) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

Il s'agit d'un minimum global.

En $(0, e^{-2})$: $rt - s^2 = -4 < 0$. Pas d'extremum local en ce point.

Exercice 15 : [énoncé]

f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.

Points critiques $(0, 1)$ et $(0, e^{-2})$.

En $(0, 1)$: $f(0, 1) = 0$.

Puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, f(x, y) \geq 0$$

$(0, 1)$ est un minimum global.

En $(0, e^{-2})$: $rt - s^2 = -4$.

Ce n'est pas un extremum local.

Exercice 16 : [énoncé]

a) Après étude du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = x + y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x - y \end{cases}$$

on vérifie aisément que

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2$$

est une primitive de la forme différentielle ω .

b) Soit y une solution sur I de l'équation différentielle étudiée.

Pour tout $x \in I$, on a

$$\frac{d}{dx}(f(x, y(x))) = 0$$

donc $x \mapsto f(x, y(x))$ est une fonction constante. En posant λ la valeur de cette constante, on obtient

$$\forall x \in I, y^2 - 2xy - x^2 + 2\lambda = 0$$

puis

$$\forall x \in I, x^2 - \lambda \geq 0 \text{ et } y(x) = x + \varepsilon(x)\sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ avec } \varepsilon(x) = \pm 1$$

Pour $\lambda < 0$, la quantité $x^2 - \lambda$ est strictement positive sur \mathbb{R} . Puisque la fonction

$$\varepsilon : x \mapsto \varepsilon(x) = \frac{y(x) - x}{\sqrt{2x^2 - 2\lambda}}$$

est continue et ne prend que les valeurs 1 ou -1 , elle est constante et donc

$$\forall x \in I, y(x) = x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$$

Pour $\lambda > 0$, quand la quantité $x^2 - \lambda$ s'annule, elle change de signe et ce ne peut donc qu'être en une extrémité de l'intervalle I . Par un argument de continuité semblable au précédent, on obtient encore

$$\forall x \in I, y(x) = x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda} \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = x - \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$$

et puisque la fonction y est dérivable sur I , on a nécessairement $x^2 - \lambda > 0$ sur I . Pour $\lambda = 0$.

Si $I \subset \mathbb{R}^+$ ou $I \subset \mathbb{R}^-$ alors comme pour ce qui précède on obtient

$$\forall x \in I, y(x) = (1 + \sqrt{2})x \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = (1 - \sqrt{2})x$$

Sinon, par dérivabilité d'un raccord en 0 d'une solution sur $I \cap \mathbb{R}^+$ et sur $I \cap \mathbb{R}^-$, on obtient encore

$$\forall x \in I, y(x) = (1 + \sqrt{2})x \text{ ou } \forall x \in I, y(x) = (1 - \sqrt{2})x$$

Inversement, les fonctions proposées sont bien solutions en vertu des calculs qui précèdent.

Pour résumer, les solutions maximales de l'équation différentielle étudiée sont

- $x \mapsto (1 + \sqrt{2})x$ et $x \mapsto (1 - \sqrt{2})x$ sur \mathbb{R} ;
 - $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + 2\lambda}$ et $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$ sur \mathbb{R} pour $\lambda < 0$;
 - $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 + 2\lambda}$ et $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 2\lambda}$ sur $]-\infty, -\sqrt{\lambda}[$ et $]\sqrt{\lambda}, +\infty[$ pour $\lambda > 0$.

Exercice 17 : [énoncé]

a) Posons

$$P(x, y) = xy - y^2 + 1 \text{ et } Q(x, y) = x^2 - xy - 1$$

Puisque

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$$

la forme différentielle ω n'est pas fermée.

b) La forme différentielle

$$\theta(x, y) = \omega(x, y)f(xy)$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur l'ouvert étoilé \mathbb{R}^2 , elle est donc exacte si, et seulement si, elle est fermée. Cela équivaut à la satisfaction pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de l'équation

$$(2x - y)f(xy) + y(x^2 - xy - 1)f'(xy) = (2y - x)f(xy) + x(xy - y^2 + 1)f'(xy)$$

Après simplification, on obtient

$$(x + y)(f(xy) - f'(xy)) = 0$$

Par suite f est solution du problème posé si, et seulement si, f est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t)$$

Après résolution de cette équation différentielle linéaire d'ordre 1, on obtient la solution générale

$$f(t) = \lambda e^t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

On obtient alors une primitive U de la fonction forme différentielle étudiée en résolvant le système

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lambda e^{xy}(xy - y^2 + 1) \\ \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \lambda e^{xy}(x^2 - xy - 1) \end{cases}$$

Au terme des calculs, on obtient

$$U(x, y) = \lambda(x - y)e^{xy} + C$$

Exercice 18 : [énoncé]

ω n'est pas fermée et a fortiori ni exacte.

Considérons le cercle Γ obtenu par le paramétrage

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0, 2\pi]$$

On a

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_0^{2\pi} (a + R \cos t)^2 R \cos t - (b + R \sin t)^2 R \sin t dt = \int_0^{2\pi} 2aR^2 \cos^2 t + 2bR^2 \sin^2 t dt$$

car

$$\int_0^{2\pi} \cos t dt = \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0$$

Ainsi

$$\int_{\Gamma} \omega = 2\pi(a + b)R^2$$

Les cercles recherchés sont ceux centrés sur la droite d'équation $x + y = 0$.

Exercice 19 : [énoncé]

- a) ω est exacte et ses primitives sont de la forme : $f(x, y) = xy + C$.
- b) ω est exacte et ses primitives sont de la forme : $f(x, y) = \frac{y}{x-y} + C$.
- c) ω est exacte et ses primitives sont de la forme : $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) - \frac{1}{2}y^2 + C$.

Exercice 20 : [énoncé]

a) Oui, on vérifie par le calcul

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

b) On paramètre le cercle Γ par $x = \cos t, y = \sin t, t \in [0, 2\pi]$. On obtient

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

c) Non car si ω était exacte on aurait

$$\int_{\Gamma} \omega = 0$$

Exercice 21 : [énoncé]

- a) Par calculs (pénibles).
- b) C peut être inclus dans un ouvert étoilé où ω est exacte et alors $\oint_C \omega = 0$.
- c) On peut décomposer

$$\oint_{\Gamma} \omega = \int_{1/n}^n \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_n} \omega - \int_n^{1/n} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{C_{1/n}} \omega$$

avec C_n et $C_{1/n}$ les demi-cercles de rayon n et $1/n$.

$$\int_{1/n}^n \frac{\sin x}{x} dx - \int_n^{1/n} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \int_{1/n}^n \frac{\sin x}{x} dx \rightarrow 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

La convergence de cette dernière intégrale est considérée comme bien connue.

Etudions

$$\int_{C_n} \omega = \int_0^{\pi} e^{-n \sin \theta} \cos(n \cos \theta) d\theta$$

Puisque $|e^{-n \sin \theta} \cos(n \cos \theta)| \leq 1$ et $e^{-n \sin \theta} \cos(n \cos \theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ pour tout $\theta \in]0, \pi[$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_n} \omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Etudions

$$\int_{C_{1/n}} \omega = \int_0^{\pi} e^{-\frac{1}{n} \sin \theta} \cos\left(\frac{1}{n} \cos \theta\right) d\theta$$

Puisque $|e^{-\frac{1}{n} \sin \theta} \cos(\frac{1}{n} \cos \theta)| \leq 1$ et $e^{-\frac{1}{n} \sin \theta} \cos(\frac{1}{n} \cos \theta) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ pour tout $\theta \in [0, \pi]$, par convergence dominée on obtient

$$\int_{C_{1/n}} \omega \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$$

Finalement

$$2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 22 : [énoncé]

a) On intègre ici une forme différentielle complexe

$$\oint_{\Gamma_r} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = \oint_{\Gamma_r} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

avec $P(x, y) = iQ(x, y) = e^{-(x+iy)^2}$. Or

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -2i(x + iy)e^{-(x+iy)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$$

donc

$$\oint_{\Gamma_r} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = 0$$

car la forme différentielle est fermée donc exacte sur l'ouvert étoilé \mathbb{C} .

b) En paramétrant l'arc \mathcal{C}_r car

$$\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0, \pi/4]$$

on obtient

$$J_r = \int_{\mathcal{C}_r} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = \int_0^{\pi/4} r e^{-r^2(\cos t + i \sin t)^2} (\sin t - i \cos t) dt$$

Comme une exponentielle imaginaire est de module 1, on obtient

$$|J_r| \leq \int_0^{\pi/4} r e^{-r^2 \cos 2t} dt$$

Par le changement de variable $t = \pi/4 - u$

$$\int_0^{\pi/4} r e^{-r^2 \cos 2t} dt = \int_0^{\pi/4} r e^{-r^2 \sin 2u} du$$

Par l'inégalité de convexité $\sin x \geq 2x/\pi$ valable pour $x \in [0, \pi/2]$

$$\int_0^{\pi/4} r e^{-r^2 \sin 2u} du \leq \int_0^{\pi/4} r e^{-\frac{4}{\pi} r^2 u} du = \left[\frac{4}{\pi r} e^{-\frac{4}{\pi} r^2 u} \right]_0^{\pi/4} \rightarrow 0$$

On peut donc affirmer que J_r tend vers 0 quand r tend vers $+\infty$.

c) Par paramétrage de segments

$$\int_{[O,A]} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = \int_0^r e^{-t^2} dt$$

et

$$\int_{[B,O]} e^{-(x+iy)^2} (dx + i dy) = - \int_0^r e^{-it^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} dt$$

Sachant

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on obtient

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \cos(t^2) + \sin(t^2) dt = \sqrt{\pi/2}$$

et

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^r \cos(t^2) - \sin(t^2) dt = 0$$

On peut alors conclure

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \cos t^2 dt = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin t^2 dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$$

Exercice 23 : [énoncé]

$$I = \int_0^2 2t^2 + t^2 dt = 8$$

Exercice 24 : [énoncé]

En introduisant le paramétrage

$$\begin{cases} x(t) = a + R \cos t \\ y(t) = b + R \sin t \end{cases} \text{ avec } t \in [0, 2\pi]$$

on obtient

$$I = \int_0^{2\pi} ((a + R \cos t)^2 R \cos t - (b + R \sin t)^2 R \sin t) dt = 2\pi(a - b)R^2$$

Exercice 25 : [énoncé]

$$I = \int_0^1 0 dx + \int_0^1 (1-t)^2 - t^2 dt + \int_0^1 0 dy = 0$$